Rappels: Projection orthogonale sur un $W \subseteq \mathbb{R}^n$

Si $W = \text{span}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ avec $(\vec{u}_i)$ base orth. de W

$$\text{proj}_W(\vec{v}) = \underbrace{\frac{v \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}}_{\in \mathbb{R}} \vec{u}_1 + \dots + \underbrace{\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p}}_{\in \mathbb{R}} \vec{u}_p \quad (*)$$

$= \text{proj}_{W_1}(\vec{v})$; $= \text{proj}_{W_p}(\vec{v})$

pour $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

⚠ cette formule n'est valable que si les $\vec{u}_i$ forment une base orthogonale

$W_1 = \text{span}\{\vec{u}_1\}$
$\vdots$
$W_p = \text{span}\{\vec{u}_p\}$

⚠ cette notation ne correspond pas à celle du théorème 67 ..

exemple: • $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ $\quad W_1 = \text{span}\{\vec{e}_1\}$, $W_2 = \text{span}\{\vec{e}_2\}$

$W = \text{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

$\text{proj}_{W_1}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\text{proj}_{W_2}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{\text{proj}_W(\vec{v}) = \text{proj}_{W_1}(\vec{v}) + \text{proj}_{W_2}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

• $\left(\vec{e}_1, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2\,'}, \vec{e}_3\right)$ base de $\mathbb{R}^3$ non orthogonale

$\text{proj}_{W_1}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{proj}_{W_2'}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}_2\,'}{\vec{e}_2\,' \cdot \vec{e}_2\,'} \vec{e}_2\,' = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{proj}_{\vec{W}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \text{proj}_{W_1}(\vec{v}) + \text{proj}_{W_2'}(\vec{v})}$$

car la base n'est pas orthogonale.

Th. 66 $\quad (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ base orthonormale

$\text{proj}_W(\vec{v}) = U U^T \vec{v}$

preuve sur moodle